COLEGIO “SAN RAFAEL” I.E.D.
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE BOGOTÁ, D. C.

TRIGONOMETRÍA
GRADO DÉCIMO
Docente: Clarena Aranda R.

Primer periodo

Las actividades que se proponen a continuación corresponden al primero y segundo período del año lectivo.

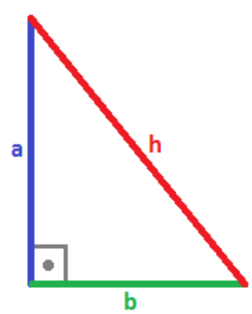
Lea detenidamente el taller y posteriormente desarrolle las actividades propuestas en su cuaderno

Competencia: Resuelve situaciones problema asociadas a triángulos rectángulos.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Dado un triángulo rectángulo de catetos *a* y *b* e hipotenusa *h* (el lado opuesto al ángulo recto). Entonces,

$$\boxed{h^2 = a^2 + b^2}$$



Despejando,

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{h^2 - a^2}$$

Recordemos que:

- el triángulo es **rectángulo** porque tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90 grados ó π / 2 radianes.
- la **hipotenusa** es el lado opuesto al ángulo recto

Nota: *h* siempre es mayor que los dos catetos, es decir, $h > a$ y $h > b$.

EJEMPLO 1

Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 2cm y uno de sus lados mide 1cm, ¿cuánto mide el otro lado?

Solución.

Llamamos a los lados *a* y *b* catetos y a la hipotenusa *h*. Sabemos que h=2 , a=1.

Por Pitágoras, sabemos que

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Sustituyendo los valores conocidos tenemos que

$$2^2 = 1^2 + b^2 \quad \rightarrow$$
$$4 = 1 + b^2 \quad \rightarrow$$

Ahora despejamos *b* en la ecuación

$$4 - 1 = b^2 \quad \rightarrow$$
$$3 = b^2 \quad \rightarrow$$
$$b = \pm\sqrt{3}$$

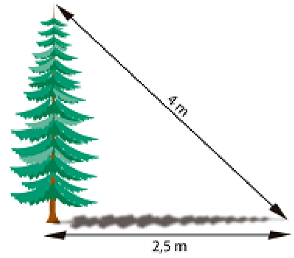
Hemos escrito los signos positivo y negativo porque es lo que, en teoría, debemos hacer. Pero como b representa la longitud de un cateto, no puede ser un número negativo.

Por tanto, el cateto mide

$$b = +\sqrt{3}\ cm \ \approx 1.73cm$$

Podemos dejar la raíz cuadrada o aproximarla.

EJEMPLO 2

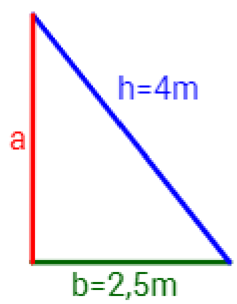


Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2,5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol?

Solución

Imaginamos un triángulo rectángulo de modo que

- su base, b, es la sombra del árbol,
- su altura, a, es la altura del árbol y
- su hipotenusa, h, es la distancia desde el árbol al extremo de la sombra.



Como el triángulo es rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular su altura, a:

$$h^2 = a^2 + b^2 \rightarrow$$

$$4^2 = a^2 + (2,5)^2 \rightarrow$$

$$16 = a^2 + 6,25 \rightarrow$$

$$a^2 = 16 - 6,25 =$$

$$= 9,75$$

Finalmente, hacemos la raíz cuadrada:

$$a = \sqrt{9,75} \cong$$

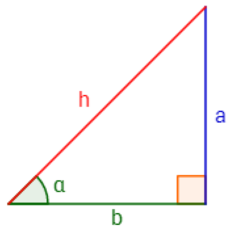
$$\cong 3,12\ m$$

Por tanto, la altura del árbol es, aproximadamente, 3,12 metros.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Seno y coseno

En todo triángulo rectángulo se cumple que para el ángulo α:



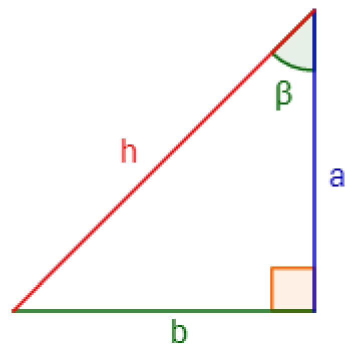
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{h}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{h}$$

El **seno** de un ángulo α se define como el cociente del **lado opuesto** al ángulo α y la hipotenusa. En este caso, al lado opuesto lo llamaremos "cateto opuesto".

El **coseno** de un ángulo α se define como el cociente del **lado contiguo** al ángulo α y la hipotenusa. Al lado contiguo lo llamaremos "cateto adyacente"

Nota: Si elegimos al ángulo β, tendremos las siguientes relaciones:

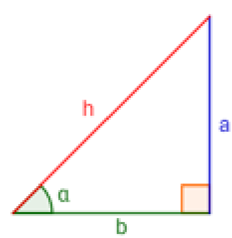


$$\cos(\beta) = \frac{a}{h}$$

$$\sin(\beta) = \frac{b}{h}$$

Tangente

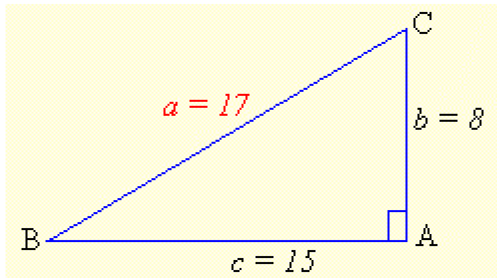
La tangente del ángulo α es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo. Esto significa que



$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

EJEMPLO 3

a. Hallar las razones trigonométricas para el ángulo B y el ángulo C en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución

$$\boldsymbol{sin(B) = \frac{8}{17}} \qquad \boldsymbol{sin(C) = \frac{15}{17}}$$

$$\boldsymbol{cos(B) = \frac{15}{17}} \qquad \boldsymbol{cos(C) = \frac{8}{17}}$$

$$\boldsymbol{tan(B) = \frac{8}{15}} \qquad \boldsymbol{tan(C) = \frac{15}{8}}$$

Arcoseno y arcocoseno

Si conocemos el seno, coseno o tangente de un ángulo α, podemos conocer el ángulo α mediante las funciones trigonométricas inversas: arcoseno ($sin^{-1}\alpha$), arcocoseno ($cos^{-1}\alpha$) o arcotangente ($tan^{-1}\alpha$).

b. Calcular las medidas de los ángulos B y C

Solución

Como $sin(B) = \frac{8}{17}$ entonces $B = sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) = 28{,}07°$

Puesto que $cos(B) = \frac{15}{17}$ entonces $B = cos^{-1}\left(\frac{15}{17}\right) = 28{,}07°$

Dado que $tan(B) = \frac{8}{15}$ entonces $B = tan^{-1}\left(\frac{8}{15}\right) = 28{,}07°$

de manera similar, podemos calcular el ángulo C, usando cualquiera de las tres razones trigonométricas.

Nota: No es necesario calcular el ángulo dado utilizando las tres razones trigonométricas inversas. Lo que si es necesario es conocer dos de los lados del triángulo para poder aplicar al menos una de ellas.

Como $sin(C) = \frac{15}{17}$ entonces $B = sin^{-1}\left(\frac{15}{17}\right) = 61,93°$

Puesto que $cos(C) = \frac{8}{17}$ entonces $B = cos^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) = 61,93°$

Dado que $tan(C) = \frac{15}{8}$ entonces $B = tan^{-1}\left(\frac{15}{8}\right) = 61,93°$

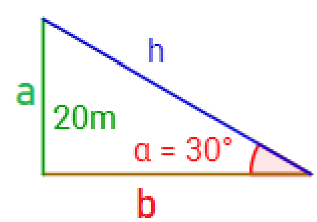
SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Solucionar un triángulo rectángulo, equivale a calcular las medidas de sus tres lados y de sus tres ángulos. Para ello, se deben tener en consideración unos elementos mínimos para poderlo hacer.

CASO 1. Se debe conocer al menos un lado y un ángulo (distinto al de 90°) en el triángulo rectángulo.

EJEMPLO 4.

Un poste de 20 metros de altura proyecta su sombra sobre el piso. Determinar la longitud de la sombra proyectada, cuando el ángulo de elevación es de 30°



Solución

En este caso para el ángulo de 30° que corresponde al ángulo dado, conocemos su cateto opuesto. Por tanto, podemos utilizar una razón trigonométrica que considere al cateto opuesto (este no siempre es el caso, puede ocurrir que se conozca el cateto adyacente). Podemos usar seno o tangente:

$$\sin(30°) = \frac{20m}{h}$$

$$tan(30°) = \frac{20m}{b}$$

Usando $\sin(30°) = \frac{20m}{h}$, al despegar h, se tiene que $h = \frac{20m}{\sin(30°)} = 40m$

Si utilizamos $tan(30°) = \frac{20m}{b}$, al despejar b, se tiene que $b = \frac{20m}{\tan(30°)} = 34,64m$

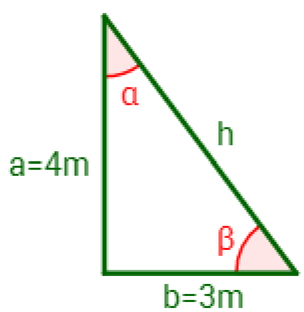
¿Qué diferencia a ambos resultados? Usando seno, estamos calculando la longitud de la hipotenusa, mientras que, al utilizar tangente, calculamos la longitud del cateto adyacente al ángulo α. Debemos revisar en el problema, si me están pidiendo la hipotenusa o el cateto opuesto. Como la sombra proyectada por el poste el perpendicular al poste, podemos afirmar que este corresponde al cateto adyacente en el triángulo rectángulo. Así que el valor que debemos calcular es b. de esta manera, la longitud de la sombra proyectada por el poste es 34,64 metros.

Es importante observar detalladamente cual es el dato (o datos) que pide concretamente el ejercicio para utilizar la razón trigonométrica apropiada.

CASO 2. Se conocen dos lados cualesquiera del triángulo rectángulo

EJEMPLO 5

Del siguiente triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos: uno mide 4m y el otro mide 3m:



Calcular la hipotenusa y Las medidas de los ángulos α y β.

Solución.

Para calcular el tercer lado, podemos utilizar el teorema de Pitágoras.

En este caso, tenemos que $h^2 = (3m)^2 + (4m)^2 = 9m^2 + 16m^2 = 25m^2$

Como $h^2 = 25m^2$ entonces $h = \sqrt[2]{25m^2} = 5m$

Conocidos los tres lados del triángulo rectángulo, se puede utilizar cualquiera de las razones trigonométricas inversas para hallar las medidas de los ángulos.

Por ejemplo, para hallar el ángulo α podemos realizar el siguiente proceso:

Como $cos\alpha = \frac{4m}{5m} = \frac{4}{5}$ entonces $\alpha = cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = 36{,}87°$

Si se utiliza $sin^{-1}\ o\ tan^{-1}$ debe obtener exactamente el mismo resultado.

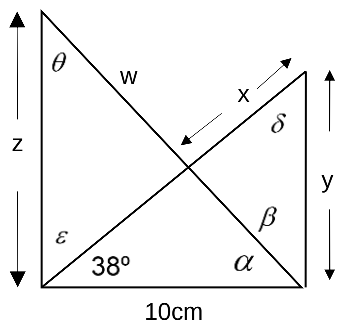
Ahora bien. Conocido el segundo ángulo, podemos calcular el tercero de dos formas. Por un lado, sabemos que la suma de los tres ángulos en todo triángulo es 180°. De esta manera, como sabemos que uno de los ángulos es 90° y el otro 36,87°, el tercer ángulo será $\beta = 180° - 90° - 36{,}87° = 53{,}13°$.

Por otro lado, podemos calcular el ángulo β, podemos utilizar cualquier razón trigonométrica inversa. Si usamos $tan\beta = \frac{4m}{3m}$ entonces $\beta = tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}13°$. En cualquiera de los dos casos, el resultado debe ser idéntico.

Con esto, hemos calculado las medidas de los tres lados y los tres ángulos del triángulo rectángulo dado.

ACTIVIDADES

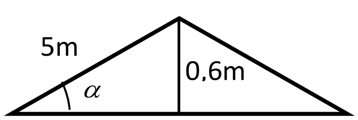
1. Calcular la medida de los lados y los ángulos que hacen falta.



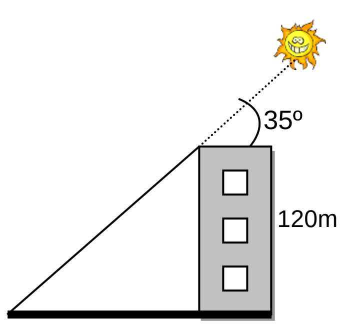
2. Una persona de 1.8 m de altura, proyecta en el suelo una sombra de 1.75m, ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol en ese momento?

3. Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situada a 8 m del suelo y observa el edificio de enfrente de la siguiente manera: la parte superior, con un ángulo de elevación de 30° y la parte inferior con un ángulo de depresión de 45°. Determinar la altura del edificio de enfrente.

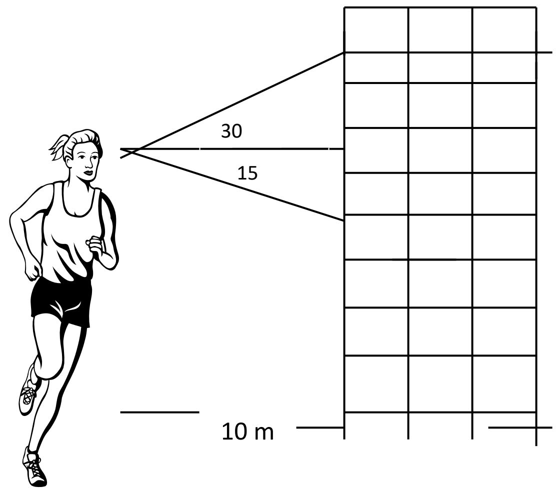
4. ¿Cuál es el ángulo que debe formar un techo, con la horizontal, si las vigas que lo contienen tienen una longitud de 5m y el pilote central de 0,6m y cuál l longitud de la viga horizontal?



5. ¿Cuál es la longitud de la sombra que proyecta un edificio de 120m de altura, cuando el sol presenta un ángulo de elevación de 35º desde la azotea de un edificio?



6. Un hombre parado 10 m de un pared, observa que el ángulo de elevación a la parte superior de una ventana a de 30º y el ángulo de depresión a la parte inferior de ella es de 15º. ¿ Cuál es la altura de la ventana?



Segundo periodo

Competencia: Resuelve situaciones problema asociadas a triángulos oblicuángulos.

TEOREMA DEL SENO Y TEOREMA DEL COSENO PARA TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

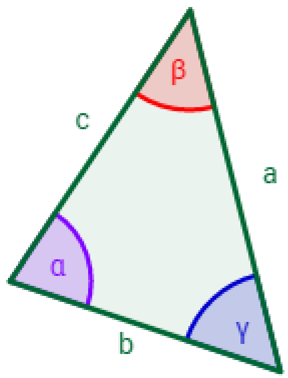
Un triángulo oblicuángulo es todo triángulo que no tiene ángulos rectos. Por tanto, no son rectángulos. Sin embargo, la suma de sus tres ángulos internos es también 180°.

En ese sentido, es importante anotar que en este tipo de triángulo, no tenemos ni hipotenusa ni catetos y por tanto no se pueden aplicar las razones trigonométricas como en un triángulo rectángulo.

Es necesario aplicar otras estrategias para su solución. Tales estrategias corresponden al teorema del seno y del coseno.

TEOREMA DEL SENO

Si tenemos un triángulo oblicuángulo cualquiera con lados a, b y c y con ángulos interiores α, β y γ (son los ángulos opuestos a los lados, respectivamente), entonces, se cumple la relación



$$\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)}$$

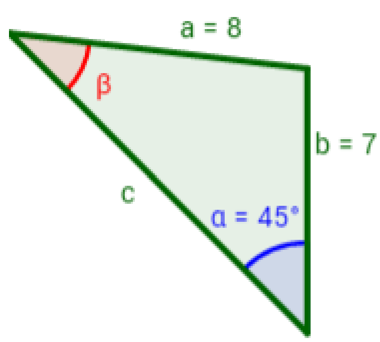
Para aplicar el teorema del seno, se deben tener en consideración los siguientes casos:

CASO 1: Se conocen dos lados del triángulo y uno de los lados correspondiente a alguno de los dos lados.

EJEMPLO 6

En el siguiente triángulo de lados *a* = 8cm y *b* = 7cm. Calcular cuánto mide el ángulo *β* sabiendo que el ángulo *γ* mide 45º.

Solución.



Como conocemos los lados *a* y *b* y el ángulo α, aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)}$$

Por tanto,

$$\frac{8}{sin(45°)} = \frac{7}{sin(\beta)}$$

Despejamos el seno de β:

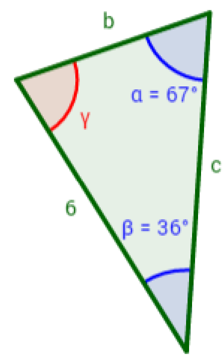
$$sin\beta = \frac{7 \times sin45°}{8} = \frac{7 \times 0{,}707}{8} = \frac{4{,}95}{8} = 0{,}619$$

Finalmente, para calcular β, como $sin\beta = 0{,}619$ entonces $\beta = sin^{-1}(0{,}619) = 38{,}24°$

CASO 2. Se conocen dos ángulos y un lado correspondiente a alguno de esos ángulos.

EJEMPLO 7.

Se tiene un triángulo con ángulos α = 67° y β = 36° y un lado a = 6cm. ¿Cuánto mide el lado c?



Solución.

Para calcular el lado c necesitamos conocer el ángulo γ.

Recordemos que en todo triángulo la suma de sus ángulos internos es 180°, es decir, tenemos la ecuación:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Despejamos el ángulo γ:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta$$

Sustituimos los valores:

$$\gamma = 180° - 67° - 36°$$

$$\gamma = 77°$$

Luego el ángulo es γ = 77º.

Ahora podemos aplicar el teorema del seno:

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

Sustituimos los datos:

$$\frac{c}{\sin(77°)} = \frac{6}{\sin(67°)}$$

Por tanto,

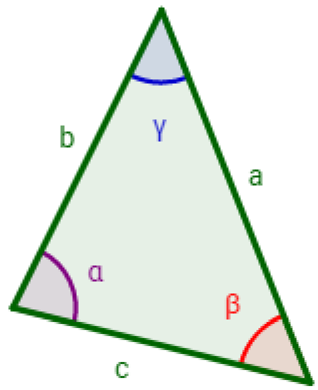
$$c = \frac{6 \cdot \sin(77°)}{\sin(67°)} \cong 6.35\ cm$$

Luego el lado *c* mide 6,35 cm.

TEOREMA DEL COSENO

Si tenemos un triángulo oblicuángulo cualquiera con lados a, b y c y con ángulos interiores α, β y γ (son los ángulos opuestos a los lados, respectivamente).

Entonces, se cumplen las relaciones



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta)$$

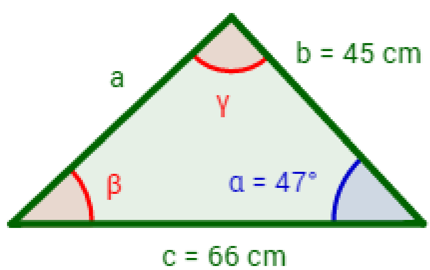
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma)$$

Para aplicar el teorema del coseno, se deben tener en consideración los siguientes casos:

CASO 1: Se conocen dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre ambos lados

EJEMPLO 8

Se tiene un triángulo cuyos lados *b* y *c* miden 45 y 66 cm respectivamente y cuyo ángulo α mide 47°. Hallar cuánto mide el lado *a* del triángulo.



Solución.

Como queremos calcular el lado *a* del triángulo, aplicamos la siguiente fórmula del teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

Tenemos los datos necesarios para calcular *a*, es decir, tenemos *b*, *c* y al ángulo α. Por tanto, sustituyendo los datos y haciendo la raíz cuadrada obtenemos:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)}$$

$$a = +\sqrt{45^2 + 66^2 - 2 \cdot 45 \cdot 66 \cdot \cos(47°)}$$

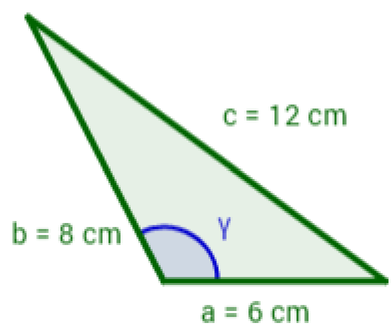
$$a \cong 48.27\ cm$$

Luego el lado *a* mide aproximadamente 48.27 cm.

CASO 2. Se conocen los tres lados del triángulo y ningún ángulo

EJEMPLO 9

¿Cuál es el valor del ángulo γ del siguiente triángulo si se sabe que los lados *a*, *b* y *c* miden 6, 8 y 12 cm respectivamente?



Solución.

Para hallar el ángulo γ aplicaremos la siguiente fórmula del teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Como conocemos todos los datos necesarios, los sustituimos en la fórmula y despejamos el ángulo γ aplicando la inversa $cos^{-1}(\gamma)$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{12^2 - 6^2 - 8^2}{-2 \cdot 6 \cdot 8}\right)$$

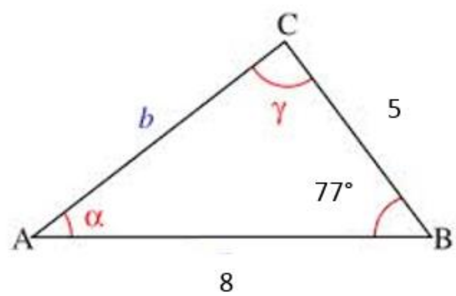
$$\gamma = \arccos\left(-\frac{11}{24}\right)$$

$$\gamma = 117.28°$$

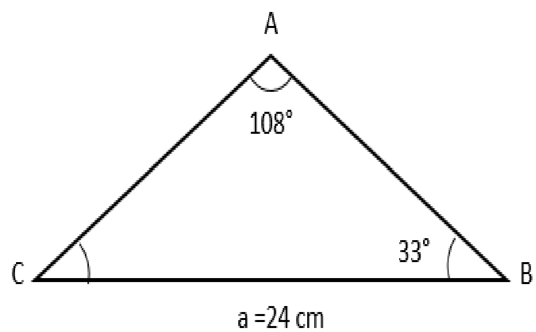
PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Resolver los siguientes triángulos, aplicando la ley del seno o coseno según corresponda.

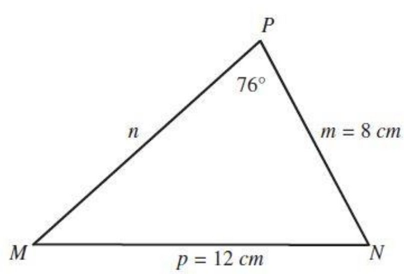
a)



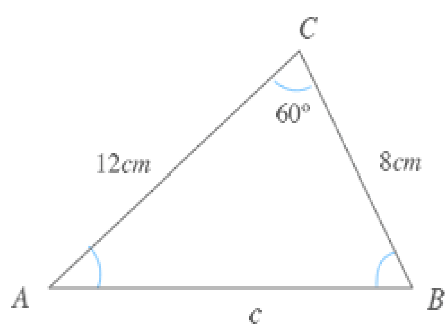
b)



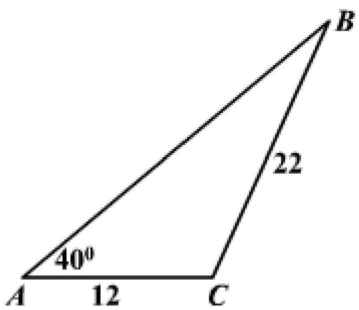
c)



d)



e)

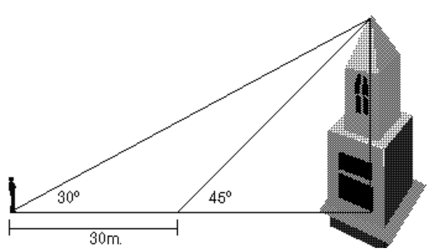


2. Un poste telefónico forma un ángulo de 82º con el piso. El ángulo de elevación del sol es de 76°. Encuentre la longitud del poste del teléfono si su sombra es de 3.5m

3. Desde un faro a 55 m sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión a un pequeño bote es de 15°. ¿A qué distancia de la base del faro se encuentra el bote?

4. Un poste apunta en la dirección opuesta al sol, formando un ángulo de 8º con la vertical, cuando el ángulo de elevación del sol es de 5° el poste proyecta una sombra de 50 mts de largo sobre el piso ¿Cuál es la longitud del poste?

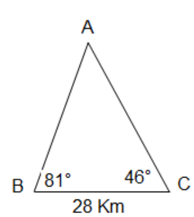
5. Desde un punto se observa un edificio cuya parte más alta forma con el suelo un ángulo de 30º, si avanzamos 30 m, el ángulo pasa a ser de 45º. Calcular la altura del edificio.



6. En un triángulo ABC, calcular las medidas de sus tres lados y sus tres ángulos

a) A =32º, B = 123º y a = 11. b) a = 167, b = 145 y C = 53º c) a = 75, b = 92 y c = 10

7. Un avión se encuentra en un punto A y es observado por dos estaciones terrestres ubicadas en los puntos B y C. ¿A que distancia se encuentra el avión de B? (ver figura)



8. Una persona se encuentra en un punto A y desea dirigirse al punto C que se encuentra a 2.8 km en línea recta. Debido a que el terreno está en malas condiciones decide seguir la trayectoria de A a B para dirigirse, finalmente a C. ¿Cuál es la distancia total que deberá recorrer?